Рассмотрим задачу из пособия под редакцией **И.В.Ященко, Математика, Профильный уровень, 50 вариантов, 2022г.**:

Вариант 6, №17. *Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений имеет единственное решение*

$$\begin{cases} |y+x^3| - |y+3x| = 2y+x^3+3x \\ |-y-3x+1| - |y+x^3-a| = -3y-6x-x^3+a+2 \end{cases}$$

Пожалуйста, записываем условие, решаем задачу (20-30 мин. достаточно). После паузы сверяемся с ответом:

$$a > -1$$

https://репетитор-мгу.рф/

Рассмотрим задачу из пособия под редакцией **И.В.Ященко, Математика, Профильный уровень, 50 вариантов, 2022г.**:

Вариант 6, №17. *Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений имеет единственное решение*

$$\begin{cases} |y+x^3| & - & |y+3x| & = & 2y+x^3+3x \\ |-y-3x+1| & - & |y+x^3-a| & = & -3y-6x-x^3+a+2 \end{cases}$$

Пожалуйста, записываем условие, решаем задачу (20-30 мин. достаточно). После паузы сверяемся с ответом:

$$a > -1$$

https://репетитор-мгу.рф/

Решение. Пусть $p = y + x^3, \; s = y + 3x$. Тогда

$$\begin{cases} |p| - |s| = p + s & (1) \\ |s-1| - |p-a| = -p - 2s + a + 2 & (2) \end{cases}$$

Запишем (2) как

$$|s-1| - |p-a| = -2(s-1) - (p-a)$$

Сделайте еще одну очевидную замену переменных.
Пусть $r = s - 1, t = p - a$. Тогда уравнение (2) перейдет в уравнение

$$|r| - |t| = -2r - t$$

Постройте множество точек, удовлетворяющих этому соотношению (сверка на следующей странице после паузы).

Решение. Пусть $p = y + x^3$, $s = y + 3x$. Тогда

$$\begin{cases} |p| - |s| = p + s & (1) \\ |s-1| - |p-a| = -p - 2s + a + 2 & (2) \end{cases}$$

Запишем (2) как

$$|s-1| - |p-a| = -2(s-1) - (p-a)$$

Сделайте еще одну очевидную замену переменных.

Пусть $r = s - 1, t = p - a$. Тогда уравнение (2) перейдет в уравнение

$$|r| - |t| = -2r - t$$

Постройте множество точек, удовлетворяющих этому соотношению (сверка на следующей странице после паузы).

Решение. Пусть $p = y + x^3$, $s = y + 3x$. Тогда

$$\begin{cases} |p| - |s| = p + s & (1) \\ |s-1| - |p-a| = -p - 2s + a + 2 & (2) \end{cases}$$

Запишем (2) как

$$|s-1| - |p-a| = -2(s-1) - (p-a)$$

Сделайте еще одну очевидную замену переменных.
Пусть $r = s - 1, t = p - a$. Тогда уравнение (2) перейдет в уравнение

$$|r| - |t| = -2r - t$$

Постройте множество точек, удовлетворяющих этому соотношению (сверка на следующей странице после паузы).

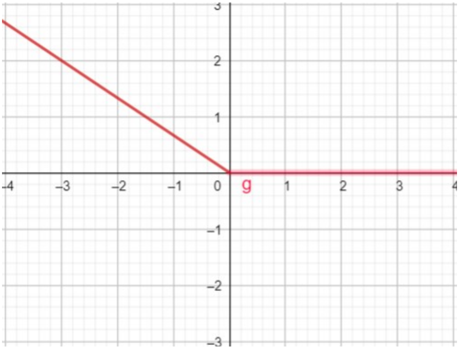

Рис.: $|r| - |t| = -2r - t$

Далее необходимо вернуться к старым переменным p, s, учесть сдвиг $p - a$ и нарисовать совместный график (1),(2).

Сверьтесь с множеством точек системы (4-я четверть и $s = -p$ отвечают уравнению (1), красное – (2), при $a = -1$).

$$\begin{cases} |p| - |s| = p + s & (1) \\ |s-1| - |p-a| = -2(s-1) - (p-a) & (2) \end{cases}$$

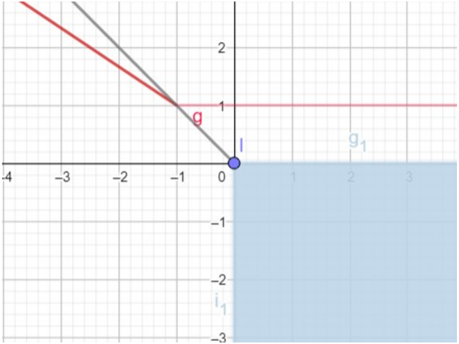

Рис.: $a = -1$

Далее необходимо рассмотреть два случая $a \leqslant -1, \;\; a > -1.$
1) Пусть $a \leqslant -1$. Выписываем систему условий на s, p.
Тогда

$$\begin{cases} p & = & -1 \\ s & = & 1 \end{cases}$$

Далее в переменных x, y.

$$\begin{cases} y & = & -x^3 - 1 \\ y & = & -3x + 1 \end{cases}$$

Отсюда $x^3 - 3x + 2 = 0, \quad x = 1; 2$ – что не удовлетворяет единственности решения.

Далее необходимо рассмотреть два случая $a \leqslant -1$, $a > -1$.
1) Пусть $a \leqslant -1$. Выписываем систему условий на s, p.
Тогда

$$\begin{cases} p = -1 \\ s = 1 \end{cases}$$

Далее в переменных x, y.

$$\begin{cases} y = -x^3 - 1 \\ y = -3x + 1 \end{cases}$$

Отсюда $x^3 - 3x + 2 = 0$, $\quad x = 1; 2$ – что не удовлетворяет единственности решения.

Далее необходимо рассмотреть два случая $a \leqslant -1,\ a > -1$.
1) Пусть $a \leqslant -1$. Выписываем систему условий на s, p.
Тогда

$$\begin{cases} p & = & -1 \\ s & = & 1 \end{cases}$$

Далее в переменных x, y.

$$\begin{cases} y & = & -x^3 - 1 \\ y & = & -3x + 1 \end{cases}$$

Отсюда $x^3 - 3x + 2 = 0, \quad x = 1; 2$ – что не удовлетворяет единственности решения.

2) Пусть $a > -1$. Тогда

$$\begin{cases} s &= -p \\ -p &= -\frac{2}{3}(p-a)+1 \end{cases}$$

Приводим подобные, выражаем p, s через параметр a.

$$\begin{cases} p &= -2a-3 \\ s &= 2a+3 \end{cases}$$

Далее выражаем в переменных x, y.

$$\begin{cases} y+x^3 &= -2a-3 \\ y+3x &= 2a+3 \end{cases}$$

2) Пусть $a > -1$. Тогда

$$\begin{cases} s & = & -p \\ -p & = & -\frac{2}{3}(p-a)+1 \end{cases}$$

Приводим подобные, выражаем p, s через параметр a.

$$\begin{cases} p & = & -2a-3 \\ s & = & 2a+3 \end{cases}$$

Далее выражаем в переменных x, y.

$$\begin{cases} y+x^3 & = & -2a-3 \\ y+3x & = & 2a+3 \end{cases}$$

2) Пусть $a > -1$. Тогда

$$\begin{cases} s & = & -p \\ -p & = & -\frac{2}{3}(p-a)+1 \end{cases}$$

Приводим подобные, выражаем p, s через параметр a.

$$\begin{cases} p & = & -2a-3 \\ s & = & 2a+3 \end{cases}$$

Далее выражаем в переменных x, y.

$$\begin{cases} y+x^3 & = & -2a-3 \\ y+3x & = & 2a+3 \end{cases}$$

https://репетитор-мгу.рф/

$$\begin{cases} y = -x^3 - 2a - 3 \\ y = -3x + 2a + 3 \end{cases}$$

Ставится задача для уравнения $-x^3 - 2a - 3 = -3x + 2a + 3$ найти значения параметра a, чтобы было единственное решение. Подумайте.
Введем функцию $f(x) = x^3 - 3x + 4a + 6$. Найдите для нее экстремумы.
Находим производную, приравниваем нулю, рассматриваем смену знаков производной, находим координаты экстремумов.
После паузы сверяемся.

$$\begin{cases} y = -x^3 - 2a - 3 \\ y = -3x + 2a + 3 \end{cases}$$

Ставится задача для уравнения $-x^3 - 2a - 3 = -3x + 2a + 3$ найти значения параметра a, чтобы было единственное решение. Подумайте.
Введем функцию $f(x) = x^3 - 3x + 4a + 6$. Найдите для нее экстремумы.
Находим производную, приравниваем нулю, рассматриваем смену знаков производной, находим координаты экстремумов.
После паузы сверяемся.

Очевидно, $x_{max} = -1,\ y_{max} = 4a + 8; \quad x_{min} = 1,\ y_{min} = 4a + 4$. Таким образом, для наличия только одного корня достаточно условия $y_{min} = 4a + 4 > 0$, т.е. $a > -1$. Случай $y_{max} = 4a + 8 < 0$ не подходит, т.к. рассматриваем случай 2) $a > -1$.

Постройте график функции $f(x) = x^3 - 3x + 4a + 6$. Сверка после паузы.

Зависимость графика $f(x)$ от параметра a можно посмотреть по ссылке
https://репетитор-мгу.рф/parameters/var6N17.html

На графике можете управлять на ползунке значениями параметра (задавать конкретное значение, останавливать).

Ответ. $a \in (-1; +\infty)$

Очевидно, $x_{max} = -1,\ y_{max} = 4a + 8; \quad x_{min} = 1,\ y_{min} = 4a + 4$. Таким образом, для наличия только одного корня достаточно условия $y_{min} = 4a + 4 > 0$, т.е. $a > -1$. Случай $y_{max} = 4a + 8 < 0$ не подходит, т.к. рассматриваем случай 2) $a > -1$.

Постройте график функции $f(x) = x^3 - 3x + 4a + 6$. Сверка после паузы.

Зависимость графика $f(x)$ от параметра a можно посмотреть по ссылке
https://репетитор-мгу.рф/parameters/var6N17.html

На графике можете управлять на ползунке значениями параметра (задавать конкретное значение, останавливать).

https://репетитор-мгу.рф/

Ответ. $a \in (-1; +\infty)$