Рассмотрим задачу из пособия под редакцией **И.В.Ященко, Математика, Профильный уровень, 50 вариантов, 2022г.**:

Вариант 12, №17. *Найдите все значения a, при которых уравнение*

$$(3a-1)x^2-2axy+(3a-1)y^2+(x+1)|y|-(y+1)|x|=0$$

имеет хотя бы одно ненулевое решение, и для любого его решения $x=\alpha,\ y=\beta$ *верно, что и* $x=\beta,\ y=\alpha$ *– тоже решение.*

Пожалуйста, записываем условие и кликаем Enter (или PageDown, или колёсико). Далее, аналогично, после каждой паузы записываем своё решение и кликаем, сверяемся.

Решение.

1) Рассмотрим случай, когда $\alpha = \beta \neq 0$, $(x = \alpha,\ y = \beta)$, отсюда получим

$$(4a - 2)\alpha^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

— удовлетворяет условию задачи.

2) Рассмотрим случай, когда $\alpha \neq \beta$. При этом α, β не равны одновременно 0 (по условии задачи).

Пусть $F(x; y) = (3a - 1)x^2 - 2axy + (3a - 1)y^2$.

Очевидно, $F(x; y) = F(y; x)$.

Тогда

$$\begin{cases} F(\alpha;\beta) + (\alpha + 1)|\beta| - (\beta + 1)|\alpha| = 0 \\ F(\alpha;\beta) + (\beta + 1)|\alpha| - (\alpha + 1)|\beta| = 0 \end{cases}$$

Решение.
1) Рассмотрим случай, когда $\alpha = \beta \neq 0$, $(x = \alpha,\ y = \beta)$, отсюда получим

$$(4a - 2)\alpha^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

— удовлетворяет условию задачи.
2) Рассмотрим случай, когда $\alpha \neq \beta$. При этом α, β не равны одновременно 0 (по условии задачи).
Пусть $F(x; y) = (3a - 1)x^2 - 2axy + (3a - 1)y^2$.
Очевидно, $F(x; y) = F(y; x)$.
Тогда

$$\begin{cases} F(\alpha; \beta) + (\alpha + 1)|\beta| - (\beta + 1)|\alpha| = 0 \\ F(\alpha; \beta) + (\beta + 1)|\alpha| - (\alpha + 1)|\beta| = 0 \end{cases}$$

Решение.

1) Рассмотрим случай, когда $\alpha = \beta \neq 0$, $(x = \alpha,\ y = \beta)$, отсюда получим

$$(4a - 2)\alpha^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

— удовлетворяет условию задачи.

2) Рассмотрим случай, когда $\alpha \neq \beta$. При этом α, β не равны одновременно 0 (по условии задачи).

Пусть $F(x;y) = (3a-1)x^2 - 2axy + (3a-1)y^2$.

Очевидно, $F(x;y) = F(y;x)$.

Тогда

$$\begin{cases} F(\alpha;\beta) + (\alpha+1)|\beta| - (\beta+1)|\alpha| = 0 \\ F(\alpha;\beta) + (\beta+1)|\alpha| - (\alpha+1)|\beta| = 0 \end{cases}$$

Решение.

1) Рассмотрим случай, когда $\alpha = \beta \neq 0$, $(x = \alpha,\ y = \beta)$, отсюда получим

$$(4a - 2)\alpha^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

— удовлетворяет условию задачи.

2) Рассмотрим случай, когда $\alpha \neq \beta$. При этом α, β не равны одновременно 0 (по условии задачи).

Пусть $F(x; y) = (3a - 1)x^2 - 2axy + (3a - 1)y^2$.

Очевидно, $F(x; y) = F(y; x)$.

Тогда

$$\begin{cases} F(\alpha; \beta) + (\alpha + 1)|\beta| - (\beta + 1)|\alpha| = 0 \\ F(\alpha; \beta) + (\beta + 1)|\alpha| - (\alpha + 1)|\beta| = 0 \end{cases}$$

Решение.

1) Рассмотрим случай, когда $\alpha = \beta \neq 0$, $(x = \alpha,\ y = \beta)$, отсюда получим

$$(4a-2)\alpha^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

— удовлетворяет условию задачи.

2) Рассмотрим случай, когда $\alpha \neq \beta$. При этом α, β не равны одновременно 0 (по условии задачи).

Пусть $F(x;y) = (3a-1)x^2 - 2axy + (3a-1)y^2$.

Очевидно, $F(x;y) = F(y;x)$.

Тогда

$$\begin{cases} F(\alpha;\beta) + (\alpha+1)|\beta| - (\beta+1)|\alpha| = 0 \\ F(\alpha;\beta) + (\beta+1)|\alpha| - (\alpha+1)|\beta| = 0 \end{cases}$$

Решение.

1) Рассмотрим случай, когда $\alpha = \beta \neq 0$, $(x = \alpha,\ y = \beta)$, отсюда получим

$$(4a - 2)\alpha^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

— удовлетворяет условию задачи.

2) Рассмотрим случай, когда $\alpha \neq \beta$. При этом α, β не равны одновременно 0 (по условии задачи).

Пусть $F(x; y) = (3a - 1)x^2 - 2axy + (3a - 1)y^2$.

Очевидно, $F(x; y) = F(y; x)$.

Тогда

$$\begin{cases} F(\alpha;\beta) + (\alpha + 1)|\beta| - (\beta + 1)|\alpha| = 0 \\ F(\alpha;\beta) + (\beta + 1)|\alpha| - (\alpha + 1)|\beta| = 0 \end{cases}$$

Отсюда получаем необходимые условия

$$(\alpha+1)|\beta| = (\beta+1)|\alpha| \qquad (1)$$

Если допустим, что возможно $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, то получим противоречие ($\beta = 0$).
Таким образом, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Раскрывая модули для разных знаков α, β, получим либо $\alpha = \beta$ (противоречит $\alpha \neq \beta$), либо

$$\alpha + \beta = -2\beta\alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \neq -\beta$$

Далее, рассматривая

$$\alpha + \beta + 2\beta\alpha = 0$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2(2\beta+1)} > -\frac{1}{2}$$

Отсюда получаем необходимые условия

$$(\alpha+1)|\beta| = (\beta+1)|\alpha| \qquad (1)$$

Если допустим, что возможно $\alpha = 0,\ \beta \neq 0$, то получим противоречие $(\beta = 0)$.

Таким образом, $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$. Раскрывая модули для разных знаков α, β, получим либо $\alpha = \beta$ (противоречит $\alpha \neq \beta$), либо

$$\alpha + \beta = -2\beta\alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \neq -\beta$$

Далее, рассматривая

$$\alpha + \beta + 2\beta\alpha = 0$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2(2\beta+1)} > -\frac{1}{2}$$

Отсюда получаем необходимые условия

$$(\alpha+1)|\beta| = (\beta+1)|\alpha| \qquad (1)$$

Если допустим, что возможно $\alpha = 0,\ \beta \neq 0$, то получим противоречие ($\beta = 0$).
Таким образом, $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$. Раскрывая модули для разных знаков α, β, получим либо $\alpha = \beta$ (противоречит $\alpha \neq \beta$), либо

$$\alpha + \beta = -2\beta\alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \neq -\beta$$

Далее, рассматривая

$$\alpha + \beta + 2\beta\alpha = 0$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2(2\beta+1)} > -\frac{1}{2}$$

Отсюда получаем необходимые условия

$$(\alpha+1)|\beta| = (\beta+1)|\alpha| \qquad (1)$$

Если допустим, что возможно $\alpha = 0,\ \beta \neq 0$, то получим противоречие $(\beta = 0)$.
Таким образом, $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0$. Раскрывая модули для разных знаков α, β, получим либо $\alpha = \beta$ (противоречит $\alpha \neq \beta$), либо

$$\alpha + \beta = -2\beta\alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \neq -\beta$$

Далее, рассматривая

$$\alpha + \beta + 2\beta\alpha = 0$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2(2\beta+1)} > -\frac{1}{2}$$

Получаем необходимые условия на α, β, эквивалентные (1):

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\beta\alpha = 0 \\ -\frac{1}{2} < \alpha < 0 \\ \beta > 0 \\ \alpha \neq -\beta \end{cases} \qquad (2)$$

Построим график функции:

$$\varphi(\alpha) = \frac{\alpha + 1}{|\alpha|} \quad \Rightarrow \quad \varphi(\alpha) = \begin{cases} -1 - 1/\alpha, & \alpha < 0 \\ 1 + 1/\alpha, & \alpha > 0 \end{cases}$$

График функции строим самостоятельно (сверка на следующей странице).

Получаем необходимые условия на α, β, эквивалентные (1):

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\beta\alpha = 0 \\ -\frac{1}{2} < \alpha < 0 \\ \beta > 0 \\ \alpha \neq -\beta \end{cases} \qquad (2)$$

Построим график функции:

$$\varphi(\alpha) = \frac{\alpha + 1}{|\alpha|} \quad \Rightarrow \quad \varphi(\alpha) = \begin{cases} -1 - 1/\alpha, & \alpha < 0 \\ 1 + 1/\alpha, & \alpha > 0 \end{cases}$$

График функции строим самостоятельно (сверка на следующей странице).

Получаем необходимые условия на α, β, эквивалентные (1):

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 2\beta\alpha = 0 \\ -\frac{1}{2} < \alpha < 0 \\ \beta > 0 \\ \alpha \neq -\beta \end{cases} \qquad (2)$$

Построим график функции:

$$\varphi(\alpha) = \frac{\alpha + 1}{|\alpha|} \quad \Rightarrow \quad \varphi(\alpha) = \begin{cases} -1 - 1/\alpha, & \alpha < 0 \\ 1 + 1/\alpha, & \alpha > 0 \end{cases}$$

График функции строим самостоятельно (сверка на следующей странице).

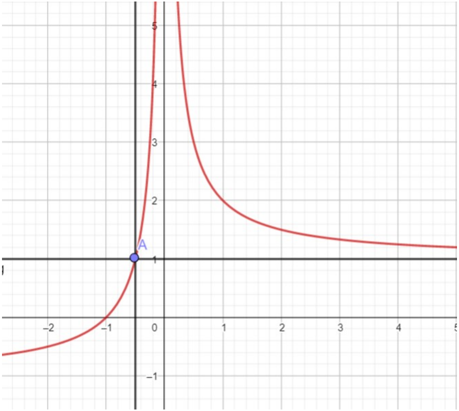

Рис.: $\varphi(\alpha) = \dfrac{\alpha + 1}{|\alpha|}$

Очевидно, решение уравнения $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ существует при $-1/2 < \alpha < 0,\ \beta > 0,\ \alpha \neq -\beta$.

Таким образом, при условии (2) получаем множество пар $(\alpha; \beta)$, которые удовлетворяют соотношению $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$.

Для этих пар $(\alpha; \beta)$ необходимо найти такие значения параметра a, что будет существовать ненулевое решение системы:

$$\begin{cases} -1/2 < \alpha < 0 \\ \beta > 0 \\ \alpha \neq -\beta \\ (3a-1)\alpha^2 - 2a\alpha\beta + (3a-1)\beta^2 = 0 \end{cases}$$

Очевидно, $a = \frac{1}{3}$ не удовлетворяет системе. Рассмотрим $a \neq \frac{1}{3}$.

Очевидно, решение уравнения $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ существует при $-1/2 < \alpha < 0,\ \beta > 0,\ \alpha \neq -\beta$.
Таким образом, при условии (2) получаем множество пар $(\alpha; \beta)$, которые удовлетворяют соотношению $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$.
Для этих пар $(\alpha; \beta)$ необходимо найти такие значения параметра a, что будет существовать ненулевое решение системы:

$$\begin{cases} -1/2 < \alpha < 0 \\ \beta > 0 \\ \alpha \neq -\beta \\ (3a-1)\alpha^2 - 2a\alpha\beta + (3a-1)\beta^2 = 0 \end{cases}$$

Очевидно, $a = \frac{1}{3}$ не удовлетворяет системе. Рассмотрим $a \neq \frac{1}{3}$.

Очевидно, решение уравнения $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ существует при $-1/2 < \alpha < 0,\ \beta > 0,\ \alpha \neq -\beta$.
Таким образом, при условии (2) получаем множество пар $(\alpha;\beta)$, которые удовлетворяют соотношению $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$.
Для этих пар $(\alpha;\beta)$ необходимо найти такие значения параметра a, что будет существовать ненулевое решение системы:

$$\begin{cases} -1/2 < \alpha < 0 \\ \beta > 0 \\ \alpha \neq -\beta \\ (3a-1)\alpha^2 - 2a\alpha\beta + (3a-1)\beta^2 = 0 \end{cases}$$

Очевидно, $a = \frac{1}{3}$ не удовлетворяет системе. Рассмотрим $a \neq \frac{1}{3}$.

Очевидно, решение уравнения $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ существует при $-1/2 < \alpha < 0,\ \beta > 0,\ \alpha \neq -\beta$.
Таким образом, при условии (2) получаем множество пар $(\alpha; \beta)$, которые удовлетворяют соотношению $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$.
Для этих пар $(\alpha; \beta)$ необходимо найти такие значения параметра a, что будет существовать ненулевое решение системы:

$$\begin{cases} -1/2 < \alpha < 0 \\ \beta > 0 \\ \alpha \neq -\beta \\ (3a-1)\alpha^2 - 2a\alpha\beta + (3a-1)\beta^2 = 0 \end{cases}$$

Очевидно, $a = \frac{1}{3}$ не удовлетворяет системе. Рассмотрим $a \neq \frac{1}{3}$.

Вводя новую переменную $t = \alpha/\beta$, сведём решение данной системы к эквивалентной:

$$\begin{cases} t^2 - \dfrac{2a}{(3a-1)}t + 1 = 0 \\ t < 0 \\ t \neq -1 \end{cases} \qquad (3)$$

По т.Виета, очевидно, оба корня меньше 0, т.о. исключаем случай $t_1 < 0 < t_2$.

Вводя новую переменную $t = \alpha/\beta$, сведём решение данной системы к эквивалентной:

$$\begin{cases} t^2 - \dfrac{2a}{(3a-1)}t + 1 = 0 \\ t < 0 \\ t \neq -1 \end{cases} \qquad (3)$$

По т.Виета, очевидно, оба корня меньше 0, т.о. исключаем случай $t_1 < 0 < t_2$.

Вводя новую переменную $t = \alpha/\beta$, сведём решение данной системы к эквивалентной:

$$\begin{cases} t^2 - \dfrac{2a}{(3a-1)}t + 1 = 0 \\ t < 0 \\ t \neq -1 \end{cases} \qquad (3)$$

По т.Виета, очевидно, оба корня меньше 0, т.о. исключаем случай $t_1 < 0 < t_2$.

Пусть $Y(t;a) = t^2 - \dfrac{2a}{(3a-1)}t + 1$. Рассмотрим при каких значениях параметра $Y(-1;a) = 0$. Очевидно, при $a = \frac{1}{4}$.

При $a = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad Y(t;\frac{1}{4}) = (t+1)^2$.

Таким образом, при $a = \frac{1}{4}$ условие задачи не выполняется (получим $t = -1$).

Отсюда, решение системы (3) дополняется условием $a \neq \frac{1}{4}$. Это эквивалентно совокупности условий:

$$\begin{cases} D = 4(a^2 - (3a-1)^2) \geqslant 0 \\ -\dfrac{B}{2A} = -\dfrac{-2a}{2(3a-1)} < 0 \\ a \neq \dfrac{1}{4} \end{cases} \qquad (4)$$

Пусть $Y(t;a) = t^2 - \dfrac{2a}{(3a-1)}t + 1$. Рассмотрим при каких значениях параметра $Y(-1;a) = 0$. Очевидно, при $a = \frac{1}{4}$.

При $a = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad Y(t;\frac{1}{4}) = (t+1)^2$.

Таким образом, при $a = \frac{1}{4}$ условие задачи не выполняется (получим $t = -1$).

Отсюда, решение системы (3) дополняется условием $a \neq \frac{1}{4}$. Это эквивалентно совокупности условий:

$$\begin{cases} D = 4(a^2 - (3a-1)^2) \geqslant 0 \\ -\dfrac{B}{2A} = -\dfrac{-2a}{2(3a-1)} < 0 \\ a \neq \dfrac{1}{4} \end{cases} \tag{4}$$

Пусть $Y(t;a) = t^2 - \dfrac{2a}{(3a-1)}t + 1$. Рассмотрим при каких значениях параметра $Y(-1;a) = 0$. Очевидно, при $a = \frac{1}{4}$.
При $a = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad Y(t;\frac{1}{4}) = (t+1)^2$.
Таким образом, при $a = \frac{1}{4}$ условие задачи не выполняется (получим $t = -1$).
Отсюда, решение системы (3) дополняется условием $a \neq \frac{1}{4}$. Это эквивалентно совокупности условий:

$$\begin{cases} D = 4(a^2 - (3a-1)^2) \geqslant 0 \\ -\dfrac{B}{2A} = -\dfrac{-2a}{2(3a-1)} < 0 \\ a \neq \dfrac{1}{4} \end{cases} \qquad (4)$$

Пусть $Y(t;a) = t^2 - \frac{2a}{(3a-1)}t + 1$. Рассмотрим при каких значениях параметра $Y(-1;a) = 0$. Очевидно, при $a = \frac{1}{4}$.
При $a = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad Y(t;\frac{1}{4}) = (t+1)^2$.
Таким образом, при $a = \frac{1}{4}$ условие задачи не выполняется (получим $t = -1$).
Отсюда, решение системы (3) дополняется условием $a \neq \frac{1}{4}$. Это эквивалентно совокупности условий:

$$\begin{cases} D = 4(a^2 - (3a-1)^2) \geqslant 0 \\ -\frac{B}{2A} = -\frac{-2a}{2(3a-1)} < 0 \\ a \neq \frac{1}{4} \end{cases} \qquad (4)$$

Пусть $Y(t;a) = t^2 - \frac{2a}{(3a-1)}t + 1$. Рассмотрим при каких значениях параметра $Y(-1;a) = 0$. Очевидно, при $a = \frac{1}{4}$.
При $a = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad Y(t; \frac{1}{4}) = (t+1)^2$.
Таким образом, при $a = \frac{1}{4}$ условие задачи не выполняется (получим $t = -1$).
Отсюда, решение системы (3) дополняется условием $a \neq \frac{1}{4}$. Это эквивалентно совокупности условий:

$$\begin{cases} D = 4(a^2 - (3a-1)^2) \geqslant 0 \\ -\dfrac{B}{2A} = -\dfrac{-2a}{2(3a-1)} < 0 \\ a \neq \dfrac{1}{4} \end{cases} \tag{4}$$

Решая систему (4), получаем:

$$\begin{cases} \frac{1}{4} < a < \frac{1}{2} \\ 0 < a < \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{1}{4} < a < \frac{1}{3}$$

Ответ. $a \in \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$

Решая систему (4), получаем:

$$\begin{cases} \frac{1}{4} < a < \frac{1}{2} \\ 0 < a < \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{1}{4} < a < \frac{1}{3}$$

Ответ. $a \in \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$

Решая систему (4), получаем:

$$\begin{cases} \frac{1}{4} < a < \frac{1}{2} \\ 0 < a < \frac{1}{3} \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} < a < \frac{1}{3}$$

Ответ. $a \in \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$

Решая систему (4), получаем:

$$\begin{cases} \frac{1}{4} < a < \frac{1}{2} \\ 0 < a < \frac{1}{3} \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} < a < \frac{1}{3}$$

Ответ. $a \in \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$

https://репетитор-мгу.рф/