Рассмотрим задачу с письменного экзамена на экономическом факультете МГУ; 2002г., июль.

Найдите все значения a, при которых неравенство имеет единственное решение.

$$\sqrt[4]{x^2-6ax+10a^2}+\sqrt[4]{3+6ax-x^2-10a^2}\geqslant$$
$$\sqrt[4]{\sqrt{3}a+24-\frac{3}{\sqrt{2}}+|y-\sqrt{2}a^2|+|y-\sqrt{3}a|}$$

Пожалуйста, записываем условие, решаем задачу (20-30 мин. достаточно). После паузы сверяемся с ответом:

$$a=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

https://репетитор-мгу.рф/

Рассмотрим задачу с письменного экзамена на экономическом факультете МГУ; 2002г., июль.

Найдите все значения a, при которых неравенство имеет единственное решение.

$$\sqrt[4]{x^2-6ax+10a^2}+\sqrt[4]{3+6ax-x^2-10a^2}\geqslant$$

$$\sqrt[4]{\sqrt{3}a+24-\frac{3}{\sqrt{2}}+|y-\sqrt{2}a^2|+|y-\sqrt{3}a|}$$

Пожалуйста, записываем условие, решаем задачу (20-30 мин. достаточно). После паузы сверяемся с ответом:

$$a=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

https://репетитор-мгу.рф/

Для сверки/просмотра кликаем Enter (или PageDown, или колёсико). Перед каждым Enter записываем своё решение и кликаем, сверяемся.

Решение. Пусть $u = x^2 - 6ax + 10a^2$, тогда левая часть неравенства принимает вид

$$\phi(u) = \sqrt[4]{u} + \sqrt[4]{3-u}$$

Очевидно, при $u \in [0;3] \quad \phi(u) = \phi(3-u)$. Отсюда, если u – решение, то и $(3-u)$ –тоже решение.

Подумайте, что в этом случае будет необходимым условием единственности решения?

Для сверки/просмотра кликаем Enter (или PageDown, или колёсико). Перед каждым Enter записываем своё решение и кликаем, сверяемся.

Решение. Пусть $u = x^2 - 6ax + 10a^2$, тогда левая часть неравенства принимает вид

$$\phi(u) = \sqrt[4]{u} + \sqrt[4]{3-u}$$

Очевидно, при $u \in [0; 3] \quad \phi(u) = \phi(3-u)$. Отсюда, если u – решение, то и $(3-u)$ –тоже решение.

Подумайте, что в этом случае будет необходимым условием единственности решения?

Таким образом, необходимым условием единственности решения по u будет $u = 3 - u$, или $u = \frac{3}{2}$.
Но, u в свою очередь зависит от x.

$$u = \frac{3}{2} = x^2 - 6ax + 10a^2$$

Подумайте, что в этом случае будет необходимым условием единственности решения по x?
Для единственности по x потребуем равенство нулю дискриминанта

$$D = 36a^2 - 4(10a^2 - \frac{3}{2}) = -4a^2 + 3 = 0$$

$$a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Таким образом, получены необходимые условия единственности решения неравенства(но, не достаточные). Далее необходимо рассмотреть полученные значения для a.

Таким образом, необходимым условием единственности решения по u будет $u = 3 - u$, или $u = \frac{3}{2}$.
Но, u в свою очередь зависит от x.

$$u = \frac{3}{2} = x^2 - 6ax + 10a^2$$

Подумайте, что в этом случае будет необходимым условием единственности решения по x?
Для единственности по x потребуем равенство нулю дискриминанта

$$D = 36a^2 - 4(10a^2 - \frac{3}{2}) = -4a^2 + 3 = 0$$

$$a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Таким образом, получены необходимые условия единственности решения неравенства(но, не достаточные). Далее необходимо рассмотреть полученные значения для a.

Таким образом, необходимым условием единственности решения по u будет $u = 3 - u$, или $u = \frac{3}{2}$.
Но, u в свою очередь зависит от x.

$$u = \frac{3}{2} = x^2 - 6ax + 10a^2$$

Подумайте, что в этом случае будет необходимым условием единственности решения по x?
Для единственности по x потребуем равенство нулю дискриминанта

$$D = 36a^2 - 4(10a^2 - \frac{3}{2}) = -4a^2 + 3 = 0$$

$$a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Таким образом, получены необходимые условия единственности решения неравенства(но, не достаточные). Далее необходимо рассмотреть полученные значения для a.

Предварительно, покажите, что $\phi(u) \leqslant \phi(\frac{3}{2}) = 2\sqrt[4]{\frac{3}{2}} = \sqrt[4]{24}$.

Пусть $p = \sqrt[4]{u} \geqslant 0, \quad q = \sqrt[4]{3-u} \geqslant 0$. Требуется найти максимальное значение $p+q$, при условии $p^4 + q^4 = 3$.

Это отдельная интересная и несложная задача для самостоятельного решения. После паузы сверяемся с решением.

Используя очевидные неравенства $2pq \leqslant p^2 + q^2, \quad 2p^2q^2 \leqslant p^4 + q^4$, рассмотрим цепочку неравенств

$$(p+q)^4 = p^4+q^4+6p^2q^2+4pq(p^2+q^2) \leqslant p^4+q^4+3(p^4+q^4)+2(p^2+q^2)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 6(p^4+q^4) + 4p^2q^2 \leqslant 6(p^4+q^4) + 2(p^4+q^4) = 24$$

Таким образом,

$$\phi(u) = p + q \leqslant \sqrt[4]{24}$$

Равенство достигается при $p = q = \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$.

Предварительно, покажите, что $\phi(u) \leqslant \phi(\frac{3}{2}) = 2\sqrt[4]{\frac{3}{2}} = \sqrt[4]{24}$.

Пусть $p = \sqrt[4]{u} \geqslant 0, \quad q = \sqrt[4]{3-u} \geqslant 0$. Требуется найти максимальное значение $p+q$, при условии $p^4 + q^4 = 3$.

Это отдельная интересная и несложная задача для самостоятельного решения. После паузы сверяемся с решением.

Используя очевидные неравенства $2pq \leqslant p^2 + q^2, \quad 2p^2q^2 \leqslant p^4 + q^4$, рассмотрим цепочку неравенств

$$(p+q)^4 = p^4+q^4+6p^2q^2+4pq(p^2+q^2) \leqslant p^4+q^4+3(p^4+q^4)+2(p^2+q^2)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 6(p^4+q^4)+4p^2q^2 \leqslant 6(p^4+q^4)+2(p^4+q^4) = 24$$

Таким образом,

$$\phi(u) = p+q \leqslant \sqrt[4]{24}$$

Равенство достигается при $p = q = \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$.

Предварительно, покажите, что $\phi(u) \leqslant \phi(\frac{3}{2}) = 2\sqrt[4]{\frac{3}{2}} = \sqrt[4]{24}$.
Пусть $p = \sqrt[4]{u} \geqslant 0, \quad q = \sqrt[4]{3-u} \geqslant 0$. Требуется найти максимальное значение $p+q$, при условии $p^4+q^4=3$.
Это отдельная интересная и несложная задача для самостоятельного решения. После паузы сверяемся с решением.
Используя очевидные неравенства $2pq \leqslant p^2+q^2, \quad 2p^2q^2 \leqslant p^4+q^4$, рассмотрим цепочку неравенств

$$(p+q)^4 = p^4+q^4+6p^2q^2+4pq(p^2+q^2) \leqslant p^4+q^4+3(p^4+q^4)+2(p^2+q^2)^2 \leqslant$$
$$\leqslant 6(p^4+q^4)+4p^2q^2 \leqslant 6(p^4+q^4)+2(p^4+q^4) = 24$$

Таким образом,
$$\phi(u) = p+q \leqslant \sqrt[4]{24}$$

Равенство достигается при $p = q = \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$.

Предварительно, покажите, что $\phi(u) \leqslant \phi(\frac{3}{2}) = 2\sqrt[4]{\frac{3}{2}} = \sqrt[4]{24}$.

Пусть $p = \sqrt[4]{u} \geqslant 0, \quad q = \sqrt[4]{3-u} \geqslant 0$. Требуется найти максимальное значение $p+q$, при условии $p^4 + q^4 = 3$.

Это отдельная интересная и несложная задача для самостоятельного решения. После паузы сверяемся с решением.

Используя очевидные неравенства $2pq \leqslant p^2 + q^2, \quad 2p^2q^2 \leqslant p^4 + q^4$, рассмотрим цепочку неравенств

$$(p+q)^4 = p^4+q^4+6p^2q^2+4pq(p^2+q^2) \leqslant p^4+q^4+3(p^4+q^4)+2(p^2+q^2)^2 \leqslant$$

$$\leqslant 6(p^4+q^4) + 4p^2q^2 \leqslant 6(p^4+q^4) + 2(p^4+q^4) = 24$$

Таким образом,

$$\phi(u) = p + q \leqslant \sqrt[4]{24}$$

Равенство достигается при $p = q = \sqrt[4]{\frac{3}{2}}$.

Вернёмся к рассмотрению достаточных условий по a.

1). Пусть $a = -\sqrt{\frac{3}{2}}$. Правая часть тогда принимает вид

$$g(y) = \sqrt[4]{24 - \frac{6}{\sqrt{2}} + |y - \frac{3}{\sqrt{2}}| + |y + \frac{3}{\sqrt{2}}}$$

Рассмотрим очевидное неравенство

$$F(t) = |t - a| + |t - b| \geqslant |b - a|$$

Знак равенства достигается при $t \in [a; b]$.

Нарисуйте график этой функции.

Получаем

$$24 - \frac{6}{\sqrt{2}} + |y - \frac{3}{\sqrt{2}}| + |y + \frac{3}{\sqrt{2}}| \geqslant$$

$$\geqslant 24 - \frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{6}{\sqrt{2}} = 24$$

Вернёмся к рассмотрению достаточных условий по a.

1). Пусть $a = -\sqrt{\frac{3}{2}}$. Правая часть тогда принимает вид

$$g(y) = \sqrt[4]{24 - \frac{6}{\sqrt{2}} + |y - \frac{3}{\sqrt{2}}| + |y + \frac{3}{\sqrt{2}}}$$

Рассмотрим очевидное неравенство

$$F(t) = |t - a| + |t - b| \geqslant |b - a|$$

Знак равенства достигается при $t \in [a; b]$.

Нарисуйте график этой функции.

Получаем

$$24 - \frac{6}{\sqrt{2}} + |y - \frac{3}{\sqrt{2}}| + |y + \frac{3}{\sqrt{2}}| \geqslant$$

$$\geqslant 24 - \frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{6}{\sqrt{2}} = 24$$

Итак, для правой части

$$g(y) \geqslant \sqrt[4]{24}$$

Для левой части

$$\phi(u) \leqslant \sqrt[4]{24}$$

Когда достигается знак равенства между левой и правой частью ?

Очевидно, при

$$y \in \left[-\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$$

$$u = \frac{3}{2}$$

Таким образом, для данного значения $a = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ получаем множество решений по y – условие задачи не выполняется.

Итак, для правой части

$$g(y) \geqslant \sqrt[4]{24}$$

Для левой части

$$\phi(u) \leqslant \sqrt[4]{24}$$

Когда достигается знак равенства между левой и правой частью ?
Очевидно, при

$$y \in \left[-\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$$

$$u = \frac{3}{2}$$

Таким образом, для данного значения $a = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ получаем множество решений по y – условие задачи не выполняется.

2). Пусть $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Тогда

$$g(y) = \sqrt[4]{24 + 2|y - \frac{3}{\sqrt{2}}|} \geqslant \sqrt[4]{24}$$

При этом, $g(y) = \sqrt[4]{24}$ только при $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$.
Таким образом, получаем единственность решения всилу единственности y и однозначности выражения x через u $(D = 0)$.

Ответ. $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$