Экстремум функции нескольких переменных, подготовка к ДВИ МГУ (задачи с экзаменов в МГУ).

1. Какие значения может принимать выражение

$$x + 2y^2$$

если

$$2x^2 + y^2 \leqslant 1$$

Ответ: $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{33}{16}\right]$.

2. Найти минимум функции $f(x,y) = \sqrt{81 + x^2} + \sqrt{49 + y^2} + \sqrt{4 + (y - x - 9)^2}$.

Ответ: $9\sqrt{5}$, $(9/2; -5/2)$.

3. Чему равна наименьшая возможная длина отрезка, концы которого расположены на линиях, заданных уравнениями

$$x^2 - 18x + 81 + y^2 - 36y = 0$$
$$x^2 + 2x + y^2 + 12y - 12 = 0$$

Ответ: 1.

4. Чему равна наименьшая возможная длина отрезка, концы которого расположены на линиях, заданных уравнениями

$$x^2 - 24x + y^2 + 2y + 144 = 0$$
$$x^2 - 16x + y^2 + 8y + 71 = 0$$

Ответ: 1.

5. Найти наименьшее значение выражения

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 - 5(z - x)^2,$$

если $x, y, z \in [-1; 1]$.

Ответ: -17; $(-1; 0,5; 1)$, $(1; -0,5; -1)$.

6. Найти наименьшее значение выражения $f(x,y) = x^2 + 5y^2 + 4xy + 6y + 10$.

Ответ: 1; $(6; -3)$.

7. Среди всех решений системы

$$\begin{cases} 3y + 2x \geqslant 2 \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y \leqslant 4 \end{cases}$$

найти такое, при котором выражение $f = x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13$ принимает наименьшее значение.

Ответ: $(4/13; 6/13)$.

8. Найти наибольшее значение выражения $3x - 2y$ на множестве значений переменных x, y, удовлетворяющих условию

$$4x^2 + y^2 = 16.$$

Ответ: 10.

9. Найдите наибольшее значение выражения

$$x^2y - y^2x$$

где $0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$.

Ответ: $1/4, \ (1; 1/2)$.

10. Найдите минимальное значение выражения

$$(x + y)(y + z)$$

если x, y, z — положительные числа и $xyz(x + y + z) = 9$.

Ответ: 6.

11. Найдите наименьшее значение выражения

$$x^2 + 5y^2 + 8z^2,$$

если $xy + yz + zx = -1$.

Ответ: 4.

12. Найти наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x-1)^2 + 4} + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(y-3)^2 + 9}.$$

Ответ: $13, \ (21/5; 7/4)$.

13. Найти наибольшее из значений, которые принимает выражение $x + 3y$, если x и y удовлетворяют неравенству $x^2 + xy + 4y^2 \leqslant 3$.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

14. Дано $x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$. Какое наибольшее значение может принимать сумма $2x + y - z$?

Ответ: $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$.

15. Дано $3x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Какое наименьшее значение может принимать сумма $x - 2y + z$?

Ответ: $-\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

16. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения

$$x^2 + 2y^2,$$

если $x^2 - xy + 2y^2 = 1$.

Ответ: $\dfrac{8-2\sqrt{2}}{7}$, $\dfrac{8+2\sqrt{2}}{7}$.

17. Найти наибольшее значение выражения

$$4x^2 + 80x + y + 43$$

при условии, что

$$6x^2 + 32x + y + 283 \leqslant 0, \quad x^2 + 86x + y + 202 \geqslant 0.$$

Ответ: 30.

18. Переменные x, y связаны соотношением

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 10 = 0.$$

Найдите все значения параметра a, при которых разность между наибольшим и наименьшим значением выражения $2ax - 3y - 10$ больше 12.

Ответ: $|a| > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

19. Найти наибольшее из значений z, для которых существуют числа x, y, удовлетворяющие уравнению

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + yz + zx = 4.$$

Ответ: $\sqrt{5}$.

20. Найти экстремумы функции

$$f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 4y^2,$$

при условии $4x^2 - xy + y^2 = 2$.

21. Среди всех решений (x, y, z, v) системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z^2 + v^2 = 9 \\ xv + yz \geqslant 6 \end{cases}$$

найти такие, при которых выражение $x + z$ принимает наибольшее значение.

Ответ: $\dfrac{4}{\sqrt{13}}, \dfrac{6}{\sqrt{13}}, \dfrac{9}{\sqrt{13}}, \dfrac{6}{\sqrt{13}}$.

22. Переменные (x, y, u, v) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ u^2 + v^2 = 25 \end{cases}$$

При условии, что сумма $xu + yv$ минимальна, найти
a) максимальное значение суммы $x + v$;
b) минимальное значение $y + u$.

Ответ: $a)\sqrt{34}$; $b) - \sqrt{34}$.

23. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения

$$\frac{y^2}{25} + \frac{w^2}{144}$$

если величины x, y, z, w удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0 \\ z^2 + w^2 - 2w - 143 = 0 \\ xw + yz - x + w + 2z - 61 \geqslant 0 \end{cases}$$

Ответ: $\frac{4201 + 120\sqrt{601}}{3600}, \frac{4201 - 120\sqrt{601}}{3600}$.

24. Пусть $f(t) = \sqrt{1 + t^2} - t$. Какие значения может принимать выражение

$$f(x)f(y) + f(y)f(z) + f(z)f(x)$$

при следующих ограничениях :

$$xy + yz + zx = 1, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0 \quad ?$$

Ответ: 1.