C1 а) Решите уравнение $-\sqrt{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{2}+x\right)\cdot\sin x=\cos x$.

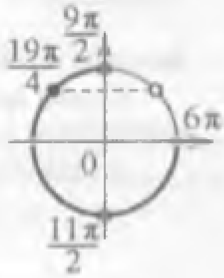
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2};6\pi\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\sqrt{2}\cos x\cdot\sin x-\cos x=0;\ \cos x\cdot\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)=0.$$

Значит, либо $\cos x=0$, откуда $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, либо $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2};6\pi\right]$.

Получим числа: $\frac{9\pi}{2}$; $\frac{19\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

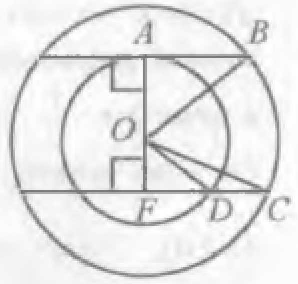
C2 Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 7. Плоскость β, параллельная плоскости α, касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5. Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α.

Решение.

Сечение шара плоскостью — круг. Рассмотрим сечение, проходящее через общий центр шаров и центры кругов.

Обозначение центра, точки касания и точек пересечения поверхностей шаров с плоскостями α и β дано на рисунке.

FD — радиус круга, полученного в сечении меньшего шара плоскостью α, тогда $S_\alpha = \pi \cdot FD^2 = 7$ — площадь сечения меньшего шара плоскостью α.



AB — радиус круга, полученного в сечении большего шара плоскостью β, тогда $S_\beta = \pi \cdot AB^2 = 5$ — площадь сечения большего шара плоскостью β.

CF — радиус круга, полученного в сечении большего шара плоскостью α.

Параллельные прямые AB и CF перпендикулярны прямой AF.

Из прямоугольных треугольников получаем:

$$OF^2 = OC^2 - CF^2 = OD^2 - FD^2,$$

откуда $CF^2 = OC^2 - OD^2 + FD^2 = OB^2 - OA^2 + FD^2 = AB^2 + FD^2$.

Площадь сечения большего шара плоскостью α:

$$S = \pi \cdot CF^2 = \pi \cdot AB^2 + \pi \cdot FD^2 = 12.$$

Ответ: 12.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^x - 29 \cdot 2^x + 168 \le 0, \\ \dfrac{x^4 - 5x^3 + 3x - 25}{x^2 - 5x} \ge x^2 - \dfrac{1}{x-4} + \dfrac{5}{x}. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы: $4^x - 29 \cdot 2^x + 168 \le 0$. Пусть $t = 2^x$, тогда неравенство примет вид: $t^2 - 29t + 168 \le 0$, откуда $8 \le t \le 21$; $8 \le 2^x \le 21$; $3 \le x \le \log_2 21$.

Решение первого неравенства исходной системы: $3 \le x \le \log_2 21$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\frac{x^4 - 5x^3 + 3x - 25}{x^2 - 5x} \ge x^2 - \frac{1}{x-4} + \frac{5}{x},$$

$$\frac{x^2\left(x^2 - 5x\right)}{x^2 - 5x} + \frac{5(x-5)}{x(x-5)} - \frac{2x}{x(x-5)} \ge x^2 - \frac{1}{x-4} + \frac{5}{x};\ \frac{x-3}{(x-5)(x-4)} \le 0,\text{ где } x \ne 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x<0$; $0<x\le 3$; $4<x<5$.

3. Поскольку $4<\log_2 21<5$, получаем решение исходной системы неравенств: $x=3$; $4<x\le\log_2 21$.

Ответ: 3; $(4; \log_2 21]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружность радиуса $6\sqrt{2}$ вписана в прямой угол. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках M и N. Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 8. Найдите MN.

Решение.

Пусть O_1 — центр окружности радиуса $6\sqrt{2}$, O_2 — центр второй окружности, A — вершина прямого угла, тогда

$$O_1A=\frac{6\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=12.$$

Возможны два случая. Первый случай: точка O_1 лежит между точками A и O_2 (рис. 1), тогда $O_2A=O_1A+O_1O_2=20$, откуда радиус второй окружности $O_2M=10\sqrt{2}$.

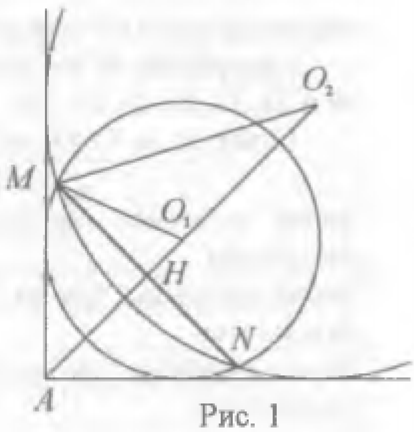


Рис. 1

В треугольнике O_1MO_2 имеем $O_1O_2=8$, $O_1M=6\sqrt{2}$, $O_2M=10\sqrt{2}$. Поскольку общая хорда MN окружностей перпендикулярна линии центров O_1O_2 и делится ею пополам, высота MH треугольника O_1MO_2 равна половине MN.

В треугольнике O_1MO_2 полупериметр $p=\dfrac{O_1O_2+O_1M+O_2M}{2}=4+8\sqrt{2}$.

$$S_{O_1MO_2}=\sqrt{p(p-O_1O_2)(p-O_1M)(p-O_2M)}=8\sqrt{14},$$

откуда $MH=\dfrac{2S_{O_1MO_2}}{O_1O_2}=2\sqrt{14}$; $MN=2MH=4\sqrt{14}$.

Второй случай: точка O_2 лежит между точками A и O_1 (рис. 2), тогда $O_2A = O_1A - O_1O_2 = 4$, откуда радиус второй окружности $O_2M = 2\sqrt{2}$.

В треугольнике O_1MO_2 имеем $O_1O_2 = 8$, $O_1M = 6\sqrt{2}$, $O_2M = 2\sqrt{2}$. Аналогично первому случаю, высота MH треугольника O_1MO_2 равна половине MN.

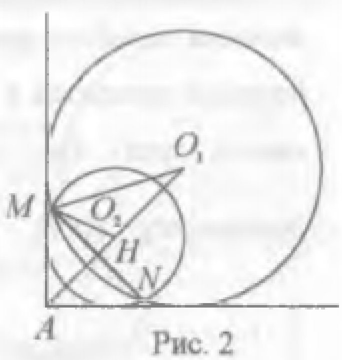


Рис. 2

В треугольнике O_1MO_2 полупериметр

$$p = \frac{O_1O_2 + O_1M + O_2M}{2} = 4 + 4\sqrt{2}.$$

$$S_{O_1MO_2} = \sqrt{p(p - O_1O_2)(p - O_1M)(p - O_2M)} = 8\sqrt{2},$$

откуда $MH = \dfrac{2S_{O_1MO_2}}{O_1O_2} = 2\sqrt{2}$; $MN = 2MH = 4\sqrt{2}$.

Ответ: $4\sqrt{2}$ или $4\sqrt{14}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{1-x}(a - x + 2) = 2$$

имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 1)$.

Решение.

Уравнение $\log_{1-x}(a - x + 2) = 2$ равносильно системе $\begin{cases} x^2 - x - 1 - a = 0, \\ x < 1, \\ x \neq 0. \end{cases}$

Эта система имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 1)$, если уравнение $x^2 - x - 1 - a = 0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий либо промежутку $[-1; 0)$, либо промежутку $(0; 1)$.

Поскольку графиком функции $f(x)=x^2-x-1-a$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке $x=\frac{1}{2}$, уравнение $f(x)=0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(0;1)$, при условии $\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right)\le 0, \\ f(1)=f(0)>0; \end{cases}$

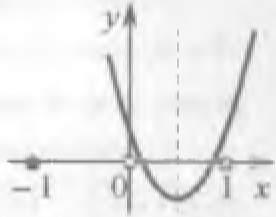


Рис. 1

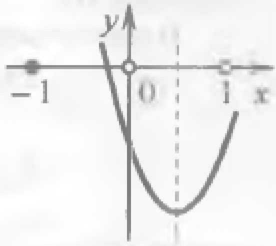


Рис. 2

$\begin{cases} -1\frac{1}{4}-a\le 0, \\ -1-a>0, \end{cases}$ откуда $-\frac{5}{4}\le a<-1$ (рис. 1).

Уравнение $f(x)=0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1;0)$, при условии $\begin{cases} f(0)<0, \\ f(-1)\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} -1-a<0, \\ 1-a\ge 0, \end{cases}$ откуда $-1<a\le 1$ (рис. 2).

Уравнение $\log_{1-x}(a-x+2)=2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1;1)$, при $-\frac{5}{4}\le a<-1$ и при $-1<a\le 1$.

Ответ: $\left[-\frac{5}{4};-1\right);\ (-1;1]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{5}{4}$, $a=-1$, $a=1$. Ответ отличается от верного только исключением точек $a=-\frac{5}{4}$ и/или $a=1$	3
Обоснованно получены все значения: $a=-\frac{5}{4}$, $a=-1$, $a=1$	2
Верно найдено одно или два из значений $a=-\frac{5}{4}$, $a=-1$ или $a=1$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

С6 Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(n\ge 3)$.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 18?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 800?

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 111.

Решение.

Без ограничения общности можно считать, что числа составляют возрастающую арифметическую прогрессию. Обозначим a — первый член этой прогрессии, а d — её разность. Тогда сумма её членов равна $\frac{2a+d(n-1)}{2}\cdot n$.

а) Да, может. Числа 5, 6, 7 составляют арифметическую прогрессию, а их сумма равна 18.

б) Для суммы членов арифметической прогрессии верно неравенство $\frac{2a+d(n-1)}{2}\cdot n \geq \frac{2+(n-1)}{2}\cdot n = \frac{n(n+1)}{2}$. Значит, $\frac{n(n+1)}{2} < 800$, откуда находим $n \leq 39$.

Сумма арифметической прогрессии 1, 2, …, 39 равна $780 < 800$. Значит, наибольшее значение n равно 39.

в) Для суммы членов арифметической прогрессии верно:

$$\frac{2a+d(n-1)}{2}\cdot n = 111;\ \left(2a+d(n-1)\right)n = 222 = 2\cdot 3\cdot 37.$$

Таким образом, число n является делителем числа 222. Если $n \geq 37$, то $\left(2a+d(n-1)\right)n \geq 37\cdot 36 > 222$, следовательно, $n < 37$. Поскольку $n \geq 3$, получаем, что $n = 3$ или $n = 6$.

Прогрессии из 3 и 6 членов с суммой 111 существуют: например, 36, 37, 38 и 16, 17, 18, 19, 20, 21.

Ответ: а) да; б) 39; в) 3; 6.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — верно найдены оба значения n в п. *в*; — доказано существование ровно двух значений n в п. *в*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4