

ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (ПИСЬМЕННО).

Вариант 1995 г. (Предварительный экзамен)

1. В арифметической прогрессии с отличной от нуля разностью сумма членов с четными номерами, не превосходящими 29, равна 168. Найти номер того члена прогрессии, который равен 12.

2. Решить уравнение $|\log_{6x}(x^2 - 7x + 12) - 1| = 1 - \log_{6x}(x^2 - 7x + 12)$.

3. Найти все корни уравнения $4 \cdot 3^{\cos x} + 3^{-\cos x} = 4\sqrt{2}$, удовлетворяющие неравенствам $-7\pi/3 < x < -\pi/3$.

4. Для каждого значения параметра a решить неравенство $|1/x + 2a| \leq x$.

5. Две окружности радиусов r и R с центрами в точках O_1 и O касаются внутренним образом в точке K . В точке A окружности радиуса r проведена касательная, пересекающая окружность радиуса R в точках B и C . Известно, что $AC:AB = p$ и отрезок AC пересекает отрезок OK . Определить: 1) при каких условиях на r , R и p возможна такая геометрическая конфигурация; 2) длину отрезка BC .

6. В кубе $ABCD A'B'C'D'$ с параллельными гранями $ABCD$ и $A'B'C'D'$ длина ребра равна 8. Через точки M , N и K , расположенные на ребрах BC , CD и CC' соответственно, проведена плоскость. Известно, что длина высоты треугольника MCK , опущенной из вершины C , равна $6/\sqrt{13}$, величина угла MNK равна $\arccos(3\sqrt{2}/5)$, произведение длин отрезков MN и KN равно $30\sqrt{2}$ и площадь треугольника MNC меньше 7. Найти радиус сферы, касающейся плоскости треугольника MNK и трех граней куба с общей точкой A' .

Ответы: 1. $n = 15$. 2. $x \in (0, 1/6) \cup [1, 3) \cup (4, 12]$.

3. $x \in \{\arccos \log_3((\sqrt{2} + 1)/2) - 2\pi; -\arccos \log_3((\sqrt{2} + 1)/2)\}$.

4. При $a < -1$ $x \in [a + \sqrt{a^2 + 1}; -a - \sqrt{a^2 - 1}] \cup [-a + \sqrt{a^2 - 1}; +\infty)$,

при $a \geq -1$ $x \in [a + \sqrt{a^2 + 1}; +\infty)$. 5. 1) $R/r \geq (p + 1)^2 / (2p)$,

2) $BC = (p + 1) / p \sqrt{4Rrp - r^2(p + 1)^2}$. 6. $R = 109(6 - \sqrt{14}) / 132$.