

**ВСТУПИТЕЛЬНЫЙ ЭКЗАМЕН ПО МАТЕМАТИКЕ (ПИСЬМЕННО).**

**Вариант 1995 г. (Предварительный экзамен)**

1. В арифметической прогрессии с отличной от нуля разностью сумма членов с четными номерами, не превосходящими 29, равна 168. Найти номер того члена прогрессии, который равен 12.

2. Решить уравнение  $|\log_{6x}(x^2 - 7x + 12) - 1| = 1 - \log_{6x}(x^2 - 7x + 12)$ .

3. Найти все корни уравнения  $4 \cdot 3^{\cos x} + 3^{-\cos x} = 4\sqrt{2}$ , удовлетворяющие неравенствам  $-7\pi/3 < x < -\pi/3$ .

4. Для каждого значения параметра  $a$  решить неравенство  $|1/x + 2a| \leq x$ .

5. Две окружности радиусов  $r$  и  $R$  с центрами в точках  $O_1$  и  $O$  касаются внутренним образом в точке  $K$ . В точке  $A$  окружности радиуса  $r$  проведена касательная, пересекающая окружность радиуса  $R$  в точках  $B$  и  $C$ . Известно, что  $AC:AB = p$  и отрезок  $AC$  пересекает отрезок  $OK$ . Определить: 1) при каких условиях на  $r$ ,  $R$  и  $p$  возможна такая геометрическая конфигурация; 2) длину отрезка  $BC$ .

6. В кубе  $ABCD A'B'C'D'$  с параллельными гранями  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$  длина ребра равна 8. Через точки  $M$ ,  $N$  и  $K$ , расположенные на ребрах  $BC$ ,  $CD$  и  $CC'$  соответственно, проведена плоскость. Известно, что длина высоты треугольника  $MCK$ , опущенной из вершины  $C$ , равна  $6/\sqrt{13}$ , величина угла  $MNK$  равна  $\arccos(3\sqrt{2}/5)$ , произведение длин отрезков  $MN$  и  $KN$  равно  $30\sqrt{2}$  и площадь треугольника  $MNC$  меньше 7. Найти радиус сферы, касающейся плоскости треугольника  $MNK$  и трех граней куба с общей точкой  $A'$ .

**Ответы:** 1.  $n = 15$ . 2.  $x \in (0, 1/6) \cup [1, 3) \cup (4, 12]$ .

3.  $x \in \{\arccos \log_3((\sqrt{2} + 1)/2) - 2\pi; -\arccos \log_3((\sqrt{2} + 1)/2)\}$ .

4. При  $a < -1$   $x \in [a + \sqrt{a^2 + 1}; -a - \sqrt{a^2 - 1}] \cup [-a + \sqrt{a^2 - 1}; +\infty)$ ,

при  $a \geq -1$   $x \in [a + \sqrt{a^2 + 1}; +\infty)$ . 5. 1)  $R/r \geq (p + 1)^2 / (2p)$ ,

2)  $BC = (p + 1) / p \sqrt{4Rrp - r^2(p + 1)^2}$ . 6.  $R = 109(6 - \sqrt{14}) / 132$ .