Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2011 года

ВАРИАНТ 111.

1. Вычислите значение функции $x^2 - 0,625\,x - \frac{1}{8}$ в точке $x = \frac{4}{5}$.

2. Решите уравнение $(\sin x + \cos x)^2 = 1$.

3. Решите уравнение

$$\log_2(3x-4) = \log_4(2-x).$$

4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{5x+3}-1}{\sqrt{3x+2}-1} > 1.$$

5. Медианы AL и BM треугольника ABC пересекаются в точке K. Найдите длину отрезка CK, если $AB = \sqrt{3}$ и известно, что вокруг четырехугольника $KLCM$ можно описать окружность.

6. Найдите наибольшее из значений функции

$$\frac{9^x}{4^x - 6^x + 9^x}$$

и точку x, в которой это значение достигается.

7. В закрытой коробке, имеющей форму куба со стороной 5, лежат два шара. Радиус первого из них равен 2. Этот шар касается плоскости основания и двух соседних боковых граней куба. Второй шар касается двух других боковых граней куба, плоскости основания и первого шара. Чему равен радиус второго шара?

8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 + 4xy + 11y^2 \le 1, \\ 4x + 7y \ge 3. \end{cases}$$

1. Вычислите значение функции $x^2 - 0.625x - 1/8$

- в точке $x = 4/5$.
- Решение. Переводим в дроби, далее к общему знаменателю, вычисляем.
- **Ответ. 3/200**.

2. Решите уравнение **$(\sin x + \cos x)^2 = 1$.**

Решение. *Первый шаг –* О.Д.З.: $x \in \mathbb{R}$

Возводим в квадрат: $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1$.

Далее, очевидно, **$\sin 2x = 0$. Отсюда, $2x = \pi n$,** $n \in Z$

На каждом шаге получали равносильные уравнения, полученное решение удовлетворяет О.Д.З.

Ответ. $x = \pi n/2$, $n \in Z$

3. Решите уравнение $\mathbf{\log_2(3x - 4) = \log_4(2 - x)}$.

Решение. *Первый шаг –* О.Д.З.: $4/3 < x < 2$.

Рассмотрим преобразования уравнений на области О.Д.З.:

$$\log_2(3x - 4) = (1/2)\log_2(2 - x) \qquad (1)$$

$$3x - 4 = \sqrt{2 - x} \qquad (2)$$

$$(3x - 4)^2 = 2 - x \qquad (3)$$

Очевидно, уравнения (2)-(3) – равносильны, т.к. левые, правые части положительны.

Решаем квадратное уравнение $\mathbf{9x^2 - 23x + 14 = 0}$, **(4)**

получаем два корня $\mathbf{x_1 = 1., x_2 = 14/9}$. По О.Д.З. подходит второй.

Ответ. 14/9.

4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{5x+3}-1}{\sqrt{3x+2}-1} > 1.$$

Решение. *Первый шаг –* О.Д.З.: ***-3/5 ≦ x < -1/3***, ***x > -1/3***.

Очевидно, исходное неравенство равносильно неравенству (после приведения дробей):

$$\frac{\sqrt{5x+3} - \sqrt{3x+2}}{\sqrt{3x+2} - 1} > 0,$$

далее получаем объединение двух систем, равносильное предыдущему неравенству :

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{5x+3}-\sqrt{3x+2}>0\\ \sqrt{3x+2}-1>0\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{5x+3}-\sqrt{3x+2}<0\\ \sqrt{3x+2}-1<0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{5x+3}>\sqrt{3x+2}\\ \sqrt{3x+2}>1\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{5x+3}<\sqrt{3x+2}\\ \sqrt{3x+2}<1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > -\dfrac{1}{2} \\ x > -\dfrac{1}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x < -\dfrac{1}{2} \\ x < -\dfrac{1}{3} \end{cases}\end{array}\right., \text{ или } \left[\begin{array}{l} x > -\dfrac{1}{3} \\ x < -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. .$$

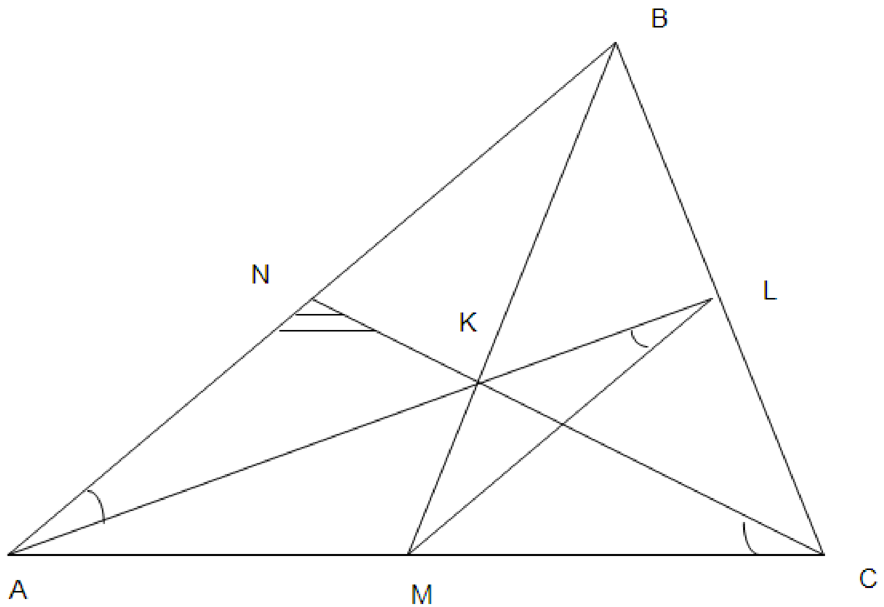
Учитывая О.Д.З., получаем ответ.

Ответ. ***-3/5 ≦ x < -1/2 , x > -1/3*** **.**

Замечание. Понятно, что в случае решения неравенства у нас уже нет возможности получать следствия исходного неравенства и далее проводить проверку (за исключением тех случаев, когда мы получаем в виде решения допустимый по количеству конечный набор чисел – тогда мы их поочередно подставляем в исходное неравенство и проверяем верность неравенства). Таким образом, на каждом этапе преобразований мы должны обосновывать равносильность полученных неравенств. И последним шагом рассматривать полученные неравенства совместно с О.Д.З. Конечно, возможно включение О.Д.З. сразу же в систему неравенств – и это широко практикуется. Далее проводим равносильные преобразования.

5. Медианы *AL* и *BM* треугольника *ABC* пересекаются в точке *K*. Найдите длину отрезка *CK*, если *AB* = √3 и известно, что вокруг четырехугольника *KLCM* можно описать окружность.

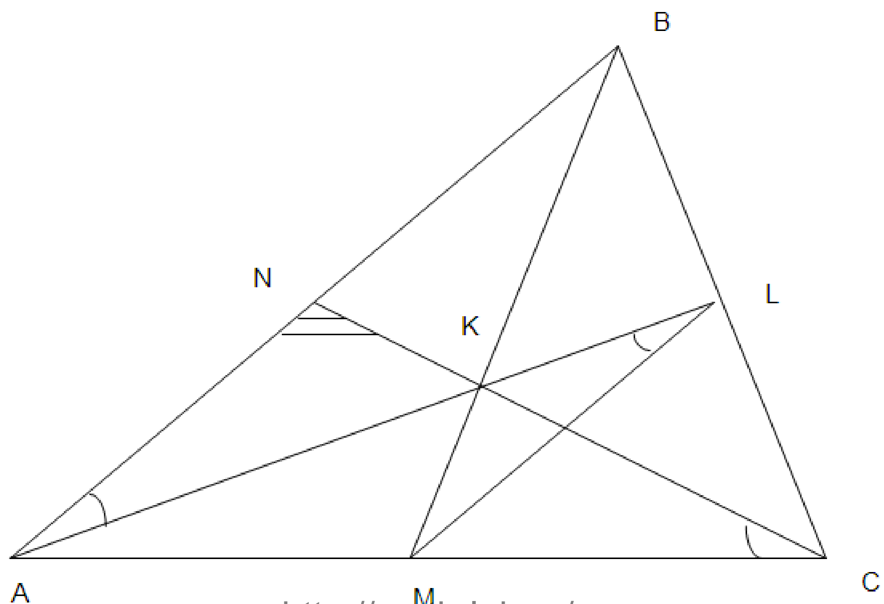
Решение. Проведем медиану CN и среднюю линию ML:



Рассмотрим треугольники ANC и ANK – они подобны по равным углам: ∟ANK – общий, ∟NAK = ∟NCA, т.к. каждый из них равен углу ∟ALM (первый – как внутренний накрест лежащий для параллельных отрезков AN, ML и секущей AL; второй – как опирающийся на общую дугу; см. рис.).

Отсюда,

$$\frac{AN}{NK} = \frac{CN}{AN}$$



$$\frac{AN}{NK} = \frac{CN}{AN}$$

Таким образом,

$$AN^2 = CN \cdot NK = \left(CK + \frac{1}{2}CK\right) \cdot \frac{1}{2}CK = \frac{3}{4}CK^2$$

Получаем,

$$CK = \frac{2}{\sqrt{3}}AN = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{AB}{2} = 1$$

Ответ. CK=1.

6. Найдите наибольшее из значений функции

$$\frac{9^x}{4^x - 6^x + 9^x}$$

и точку ***x***, в которой это значение достигается.

Решение. Разделим числитель и знаменатель на ***9***

Решение. Разделим числитель и знаменатель на $\boldsymbol{9^x}$ и в знаменателе выделим полный квадрат относительно $\boldsymbol{z=(2/3)^x}$:

$$\frac{9^x}{4^x - 6^x + 9^x} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{3}\right)^x + 1} = \frac{1}{z^2 - z + 1} = \frac{1}{(z - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \le \frac{4}{3}$$

Так как, при ***a>0*** :

$$\frac{1}{\varphi^2(z) + \frac{1}{a}} \le a$$

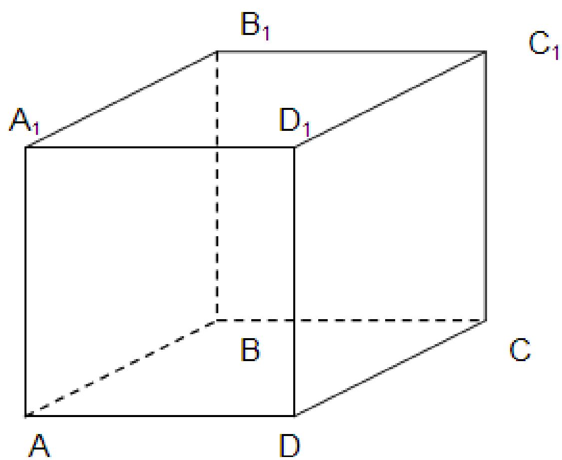
Очевидно, наибольшее значение 4/3 достигается при ***z=1/2.*** Рассмотрим, существует ли соответствующее значение ***x*** ? Да, существует, $x=1./(\log_2 3-1)$.

Таким образом, наибольшее значение функции равно 4/3 и достигается при указанном ***x***.

Ответ. $y_{max}=4/3,\ x=1./(\log_2 3-1)$.

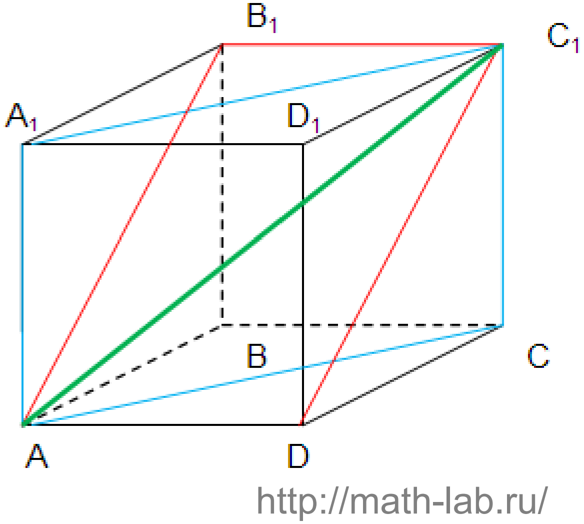
7. В закрытой коробке, имеющей форму куба со стороной 5, лежат два шара. Радиус первого из них равен 2. Этот шар касается плоскости основания и двух соседних боковых граней куба. Второй шар касается двух других боковых граней куба, плоскости основания и первого шара. Чему равен радиус второго шара?

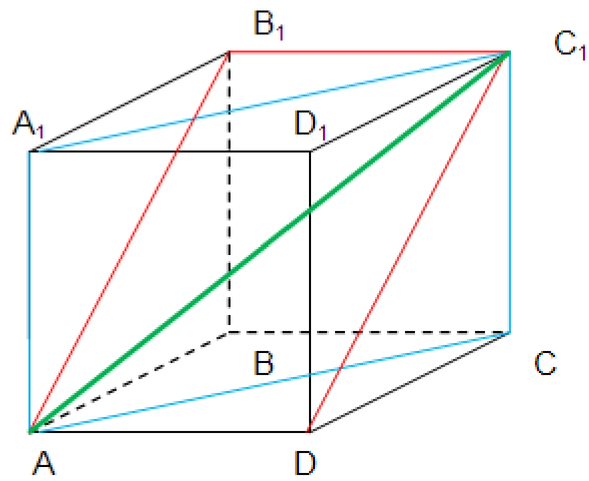
Решение. Обозначим вершины квадрата как указано на рис.



Через O_1 , O_2 – обозначим центры первого, второго шаров соответственно.

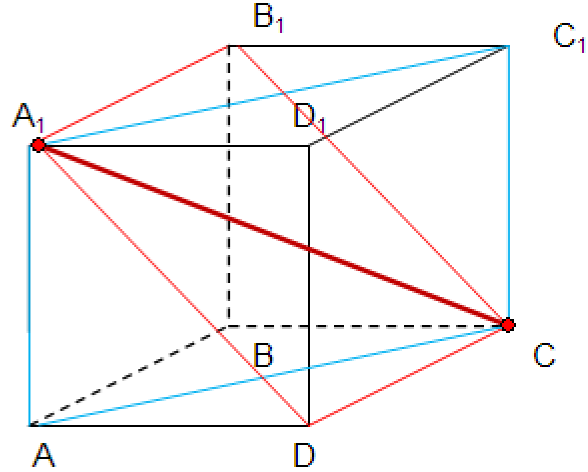
Так как $AD \perp AA_1$ и $AB \perp AA_1$, то $\angle DAB$ есть плоский угол двугранного угла, образованного плоскостями AA_1B_1B и AA_1D_1D. Отсюда следует, что центр первого шара – O_1, как точка равноудалённая от этих плоскостей, лежит в биссектральной плоскости этого угла, т.е. в плоскости AA_1C_1C (синий прямоугольник).



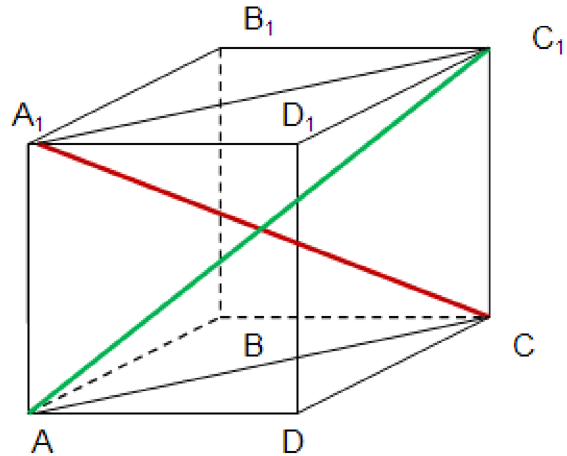


Точно так же плоскость ADC_1B_1 есть биссектральная плоскость двугранного угла, образованного плоскостями AA_1D_1D и $ABCD$. Первый шар касается этих плоскостей, значит, его центр – точка O_1, лежит в плоскости ADC_1B_1(красный прямоугольник). Плоскости AA_1C_1C и ADC_1B_1, содержащие по доказанному точку O_1 имеют общие точки A и C_1, а потому пересекаются по прямой AC_1. Значит, точка O_1 лежит на отрезке AC_1.

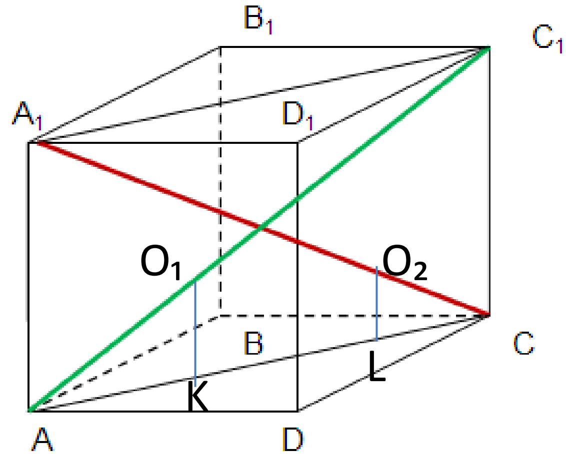
По тем же соображениям точка O_2 лежит на отрезке A_1C.



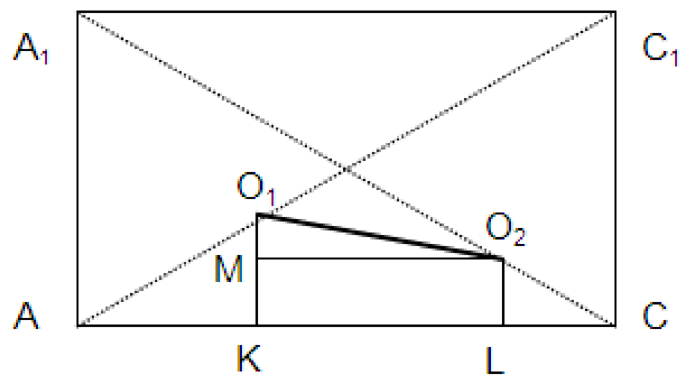
Таким образом, центр шара O_1 лежит на отрезке AC_1, а центр O_2 - на отрезке A_1C :



Плоскость AA_1C_1C проходит через ребро куба AA_1, перпендикулярное плоскости основания куба. Поэтому она перпендикулярна плоскости основания. Но тогда радиусы шаров, проведённые в точки K и L касания шаров с плоскостью основания лежат в плоскости AA_1C_1C, и точки касания K и L лежат на отрезке AC.



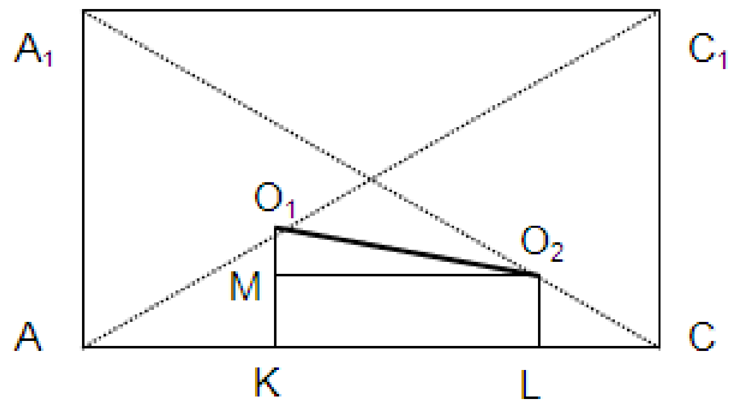
После этого, рассматриваем чисто планиметрическую задачу в прямоугольнике AA_1C_1C (см. рис.):



Даны: ребро $AA_1=5$, радиус первого шара $R_1=O_1K=2$.

Надо найти радиус второго шара $R_2 = O_2L$ - ?

Очевидно, $AC=5\sqrt{2}$. Найдем AK, LC – для определения KL.



Определим АК из подобных треугольников AO_1K и AC_1C :

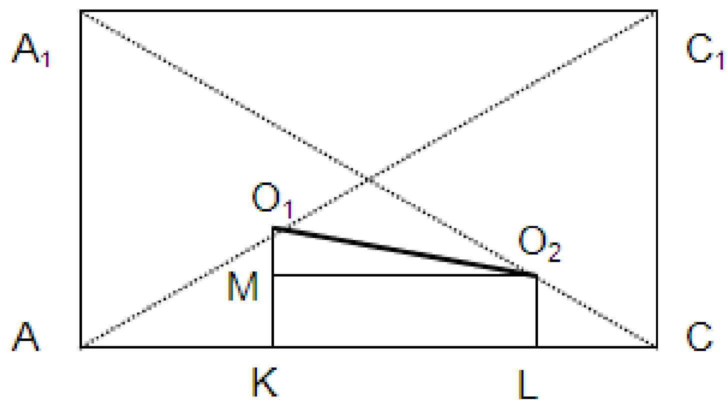
$$\frac{AK}{R_1}=\frac{AC}{C_1C}=\frac{5\sqrt{2}}{5}=\sqrt{2}$$

Отсюда, $AK=2\sqrt{2}$.

Аналогично, для подобных треугольников O_2LC, A_1AC находим $LC=R_2\sqrt{2}$.

Отсюда, $KL=AC-AK-LC=(3-R_2)\sqrt{2}$.

Далее, построим из т.O_2 перпендикуляр к O_1K и используя MO_2=KL и теорему Пифагора: $O_1O_2^2=MO_2^2+MO_1^2$, получим: $(2+R_2)^2=2(3-R_2)^2+(2-R_2)^2$. Откуда, $R_2=1$, или $R_2=9$. Второе условие не подходит, т.к. по условию второй шар лежит внутри куба.



Ну, и для полноты решения необходимо также рассмотреть случай, когда R_2 может быть больше R_1 (равенство радиусов учитывается в рассмотренном случае) . Тогда, получаем аналогичное по решению уравнение:

$(2+R_2)^2=2(3-R_2)^2+(R_2-2)^2$.

Ответ. ***R_2=1***

8. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x^2 + 4xy + 11y^2 \le 1 \\ 4x + 7y \ge 3 \end{cases}$$

Решение. Очевидно,

$$2x^2 + 4xy + 11y^2 = \left[\sqrt{2}(x+y)\right]^2 + (3y)^2$$

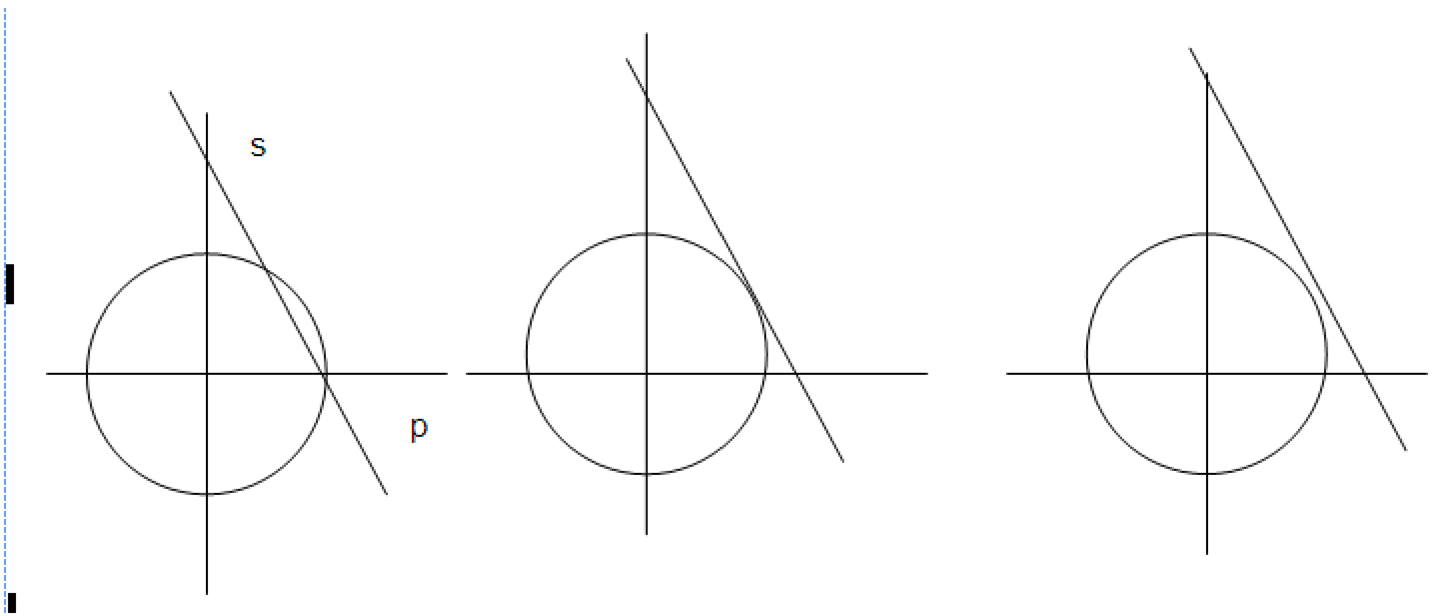
Делаем замену переменных:

$$p = \sqrt{2}(x+y),\ s = 3y$$

получаем систему:

$$\begin{cases} p^2 + s^2 \le 1 \\ s \ge 3 - 2\sqrt{2}p \end{cases}$$

Система несложно «решается» графически, но, в этом случае, мы обязаны обосновать подобное решение (в нашем случае, например, единственность), т.к. графически мы можем невольно «подыграть» себе:



Конечно, графическое «решение» очень удобно для видения возможных случаев количества решения.

Таким образом, будем решать систему аналитически (через доказательство).

Сразу сделаем замечание: в этом случае, конечно, нет необходимости переходить к новым переменным. Это было сделано только для того, чтобы показать возможность графической иллюстрации исходной системы через простые графики окружности и прямой.

Преобразуем 1-е неравенство:

$$1 \geq p^2 + s^2 \geq p^2 + (3 - 2\sqrt{2}p)^2$$

Раскроем скобки, приведем подобные члены, получим:

$$9p^2 - 12\sqrt{2}p + 8 = 9(p - \frac{2\sqrt{2}}{3})^2 \leq 0$$

Отсюда, очевидно, $p = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Далее, получаем:

$$\begin{cases} s^2 \le 1 - \dfrac{8}{9} = \dfrac{1}{9} \\ s \ge 3 - 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Очевидно, тогда ***s=1/3***, и возвращаясь к исходным переменным, получаем решение ***x=5/9, y=1/9***.

Далее, непосредственной проверкой убеждаемся, что оно удовлетворяет исходной системе.

Ответ. ***x=5/9***, ***y=1/9***.